

**BRIAN
BUTTERWORTH**

**KUNNEN
VISSSEN
TELLEN?**

**HET OPMERKELIJKE
REKENKUNDIGE
BREIN VAN MENS EN DIER**

FONTAINE UITGEVERS

Oorspronkelijke titel: *Can Fish Count?*

Oorspronkelijke uitgever: Quercus

© 2022 Brian Butterworth

Voor de Nederlandstalige uitgave:

© 2022 Fontaine Uitgevers, Amsterdam

www.fontaineuitgevers.nl

Vertaling: Rob de Ridder

Opmaak: Aard Bakker

Omslagontwerp: Buro Blikgoed

Auteursfoto: Rupert Truman

ISBN 978 94 6404 182 8

NUR 400

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm, elektronisch databestand of op welke andere wijze ook, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Deze uitgave is met de grootst mogelijke zorgvuldigheid samengesteld. Noch de maker, noch de uitgever stelt zich echter aansprakelijk voor eventuele schade als gevolg van eventuele onjuistheden en/of onvolledigheden in deze uitgave.

INHOUD

Voorwoord	9
1 De taal van het universum	15
2 Kunnen mensen tellen?	45
3 Botten en stenen en de eerste telwoorden	91
4 Kunnen apen tellen?	127
5 Zoogdieren, groot en klein	163
6 Kunnen vogels tellen?	181
7 Kunnen amfibieën en reptielen tellen?	207
8 Kunnen vissen tellen?	221
9 Zijn grotere hersenen echt beter?	243
10 Wat telt?	285
Dankbetuiging	321
Afbeeldingen: credits en bronnen	323
Noten	327
Register	341

VOORWOORD

De moderne wetenschap is een teamsport. Wie in jouw team zit, is deels een kwestie van geluk en ik vind dat ik erg geboft heb met de teams waarin ik de afgelopen jaren heb gespeeld. Niet alleen had ik dit boek nooit kunnen schrijven zonder al die toevallige ontmoetingen die ik in de loop der jaren heb gehad, ik zou er niet eens aan hebben gedacht.

Zo'n ontmoeting vond plaats tijdens een congres in Ravello met Carlo Semenza, psycholoog, psychiater en neurowetenschapper van de Universiteit van Padua. Hieruit kwam een langdurige samenwerking voort, in het begin over taalstoornissen, maar later over wiskundige cognitie en daaraan gerelateerde stoornissen.

Vermoedelijk zou ik nooit serieus zijn gaan nadenken over rekenvaardigheden als mijn toenmalige student Lisa Cipolotti daar niet mee bezig was geweest. Lisa was oorspronkelijk een van Carlo's pientere studenten die me had gevraagd of ze naar Londen kon komen om te promoveren op afasie. Eenmaal bij ons besloot ze echter geen onderzoek te gaan doen naar afasie, een taalstoornis waar al veel onderzoek naar was gedaan, maar naar een stoornis die nog door heel weinig mensen was onderzocht. En zo richtten we ons onderzoek op de neuropsychologie van het rekenen, waar op dat moment nauwelijks aan werd gewerkt. Samen met Carlo en zijn Oostenrijkse student Margarete Hittmair en met de grensverleggende neuropsycholoog Elizabeth Warrington vormden we een team aan

het National Hospital for Neurology in Londen om niet-erfelijke rekenstoornissen te onderzoeken, door de Europese Unie ondersteund met een beurs. Hierdoor werd ook het samenwerkingsverband tussen Londen en Padua in het leven geroepen dat nog steeds bestaat.

Uit onderzoek onder patiënten met neurologische stoornissen bleek allereerst dat het belangrijkste hersengebied voor numerieke processen zich in een klein deel van de pariëtale kwab bevond en dat het volwassen hersennetwerk onafhankelijk leek te zijn van andere cognitieve processen. (Dit was overigens geen nieuwe ontdekking, maar een meer gedetailleerde herhaling van onderzoek dat al vanaf de jaren 1920 is gedaan.) Interessanter was echter dat het georganiseerd leek te zijn in verschillende componenten, die stuk voor stuk los van elkaar konden zijn aangetast door een hersenstoornis. Dit betrof het volwassen brein, maar ik besloot me erin te verdiepen hoe de hersenen deze componenten ontwikkelen en waarom juist in deze specifieke gebieden. Erven we een brein dat zo is georganiseerd dat het numerieke informatie kan halen uit de omgeving? En als dat zo is, hoe diep gaan dan de wortels hiervan in de evolutionaire geschiedenis? Kan deze erfenis zich ook verkeerd ontwikkelen, zoals kleurenblindheid zich ontwikkelt?

In 1989, toen Lisa bij mij kwam werken, werden onderzoeken in wiskundecognitie verricht in afzonderlijke vakgebieden met heel hoge muren: neuropsychologie van wiskundige stoornissen, cognitieve psychologie bij volwassenen, ontwikkelingspsychologie, dierstudies, wiskundeonderwijs, wiskundefilosofie en het begin van de hersenscan. Onderzoekers op die gebieden spraken zelden met elkaar, maar net als enkele andere onderzoekers vermoedde ik dat het hele vakgebied meer progressie zou boeken als ze dat juist wel deden. Toen hadden we opnieuw een beetje geluk. Mijn vriend Tim Shallice van de International School for Advanced Studies in Triëst wist ergens geld vandaan te toveren om in 1994 in deze stad een workshop van een week te organiseren. Hier konden we voor de

allereerste keer heel wat topgeleerden en enkele topstudenten vanuit de hele wereld bij elkaar brengen om hun de gelegenheid te bieden met elkaar te praten. Een bijna direct gevolg hiervan was dat ik erin slaagde geld te vinden voor het organiseren van een Europees netwerk van zes laboratoria, NeuroMath, en daarna nog eens een wereldwijd netwerk van acht, Numbra, om deze interdisciplinaire benadering samen te stimuleren. Door de workshop in Triëst en de netwerken die daaruit zijn ontstaan heb ik een verbazingwekkend aantal inspirerende wetenschappers kunnen ontmoeten om mee te discussiëren en samen te werken. Aanwezig in Triëst was Stanislas Dehaene, een van de belangrijkste grondleggers van dit hele terrein, en zijn bijdrage heeft aan de basis gelegen van mijn denken. Geen symposium van naam is compleet zonder filosoof, en wij waren zo gelukkig dat mijn collega aan het UCL (University College London), Marcus Giaquinto, een uitmuntend wiskundefilosoof, aanwezig was en erin slaagde ons, en mij in het bijzonder, op het filosofisch smalle rechte pad te houden.

Een student die zich op dat moment wel in Triëst bevond, maar niet bij de bijeenkomst aanwezig was, was Marco Zorzi. Hij bracht enige tijd in mijn lab door waar hij baanbrekend werk verrichtte naar het gebruik van neurale netwerken om een model te maken van lezen en later van basale rekenprocessen. Nu staat professor Zorzi in Padua aan het hoofd van een van de meest innovatieve laboratoria voor wiskundecognitie ter wereld.

Randy Gallistel en Rochel Gelman waren ook aanwezig op de bijeenkomst. We werden vrienden, en ik heb sindsdien met beiden vele leuke uurtjes beleefd in verschillende delen van de wereld. Vaak discussieerden we al vanaf het ontbijt over het rekenkundig vermogen van mensen en andere dieren. Hun benadering van deze onderwerpen heeft me, zoals je nog zult zien, vergaand beïnvloed.

Randy, Giorgio Vallortigara, onderzoeker van diergedrag aan de Universiteit van Trento (Italië), en ik organiseerden in 2017 een interessant vierdaags congres bij de Royal Society over 'De oorsprong

van rekenkundige vaardigheden'. Hier kwam een wonderlijke groep geleerden op af die het onderwerp vanuit veel verschillende perspectieven benaderden, van archeologie tot insecten. We wijdden vier lange dagen aan getallen – eigenlijk vijf, aangezien Ophelia Deroy de dag ervoor een internationaal symposium had georganiseerd over de filosofie van de wiskunde aan het Institute of Philosophy in Londen. Vijf dagen over getallen: ik vond het geweldig. In zekere zin is dit boek een poging om wat er op deze bijeenkomsten is besproken toegankelijk te maken voor de algemene lezer.

Christian Agrillo uit Padua, toen nog student, heeft mijn belangstelling voor de rekenkundige vermogens van vissen gewekt. Momenteel werk ik samen met Caroline Brennan en Giorgio in een project over de genetica van dit vermogen bij zebravissen. Tetsuro Matsuzawa, die ik voor het eerst ontmoette tijdens een zomercursus van NeuroMath, nodigde me uit om een bezoek te brengen aan het Primaten Onderzoeksinstituut van de Universiteit van Kyoto om te komen kijken naar zijn inspirerende werk met chimpansees.

Elementair voor mijn hele benadering is altijd mijn werk met Bob Reeve geweest aan de vroege ontwikkeling van rekenkundige vermogens bij de bevolking van Australië in het algemeen en die van de oorspronkelijke bewoners van het land.

Mijn werk is in de loop der jaren door veel instellingen en stichtingen financieel gesteund. De Leverhulme Trust heeft ons werk met Aboriginal-kinderen gesteund en steunt nu mijn vissenonderzoek met Brennan en Vallortigara. De Australian Research Council heeft Reeve en mij gesteund bij onze longitudinale onderzoeken naar wiskundige ontwikkeling. De Wellcome Trust heeft veel van onze studies met kinderen, volwassenen en neurologische patiënten gefinancierd.

Ik moet mijn literair agent, Peter Tallack van de Science Factory, bedanken. Hij presteerde het dit project van de grond te krijgen nadat ik dat jarenlang vruchteloos zelf had geprobeerd.

Ik was al geïnteresseerd in de grondslagen van de wiskunde

sinds ik als tiener Bertrand Russell las, en vooral in de onvolledigheidsstellingen van Gödel, toen ik in 1967 toevallig Diana Laurillard ontmoette, student wiskunde en filosofie, op wiens feestje ter gelegenheid van Bonfire Night ik onuitgenodigd binnenviel. Het feest werd even onderbroken door een politie-inval, maar ik kwam er toen wel achter dat zij ook geïnteresseerd was in Gödels stellingen. Een prettige bijkomstigheid is dat Diana tot op de dag van vandaag geïnteresseerd in mijn werk en mij is gebleven. We onderzoeken nu samen hoe resultaten uit de wetenschap kunnen worden omgezet in praktische toepassingen voor het onderwijs. Ook luistert ze geduldig naar mijn ideeën en corrigeert die indien nodig. Eventuele fouten en vergissingen in dit boek moeten dus zelfs aan haar zeer kritische blik ontsnapt zijn.

DE TAAL VAN HET UNIVERSUM

Galilei (1564-1642) heeft gezegd dat wiskunde de taal is waarin het universum is geschreven en dat we die niet kunnen kennen als we niet de karakters leren waarin die taal geschreven is. Achthonderd jaar eerder schreef de geweldige Perzische wiskundige Al-Chwarizmi (in het Latijn: *Algoritmi*, ca. 780-ca. 850): 'God heeft alles in getallen geschapen.' In 1960 schreef de befaamde winnaar van de Nobelprijs voor Natuurkunde Eugene Wigner (1902-1995) zijn beroemd geworden artikel 'The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences'. Wiskunde, zo beweerde hij, bevatte het bovennatuurlijke vermogen verschijnselen in de natuurlijke wereld te beschrijven en te voorspellen. De suggestie is dat wiskunde niet slechts een instrument is om de wereld te beschrijven, maar eerder dat er iets met die wereld is dat diepgaand wiskundig is. Dit idee gaat nog verder terug dan Al-Chwarizmi, naar Pythagoras (ca. 570-495 v.C.), die gezegd zou hebben: 'Alles is een getal.'

In zekere zin is dit allemaal onzin, maar misschien schuilt er ook wel een diepere waarheid in. Pythagoras kan de eerste zijn geweest die de numerieke structuur van toonhoogte heeft opgemerkt, en we gebruiken nog steeds termen als harmonische evenredigheid en harmonische reeks. Ook legde hij de relatie vast tussen getallen en vormen, en ook deze termen gebruiken we nog steeds: vierkante, kubieke, trigonale, piramidale getallen. Hebben we ons eenmaal

verplaatst in de geest van de pythagoreeërs, dan kunnen we ons de wereld voorstellen alsof hij uit deze numeriek gedefinieerde objecten opgebouwd is, op een nogal atomaire of moleculaire wijze.

Het vinden van wiskundige structuren in de wereld is het werk van mensen die we nu wetenschappers zouden noemen, en zij zijn het tot wie Galilei, Al-Chwarizmi en Pythagoras zich richtten. Aangenomen is wel dat wetenschappers elders in het universum in staat zouden zijn de taal van het universum te begrijpen, als hun intelligentie daar tenminste voldoende voor is. Als ze ons wilden laten zien dat ze echt intelligent waren, dan zouden ze iets numerieks hebben uitgezonden. De uitdaging om radiografisch te communiceren met aliens werd enthousiast opgepakt door Nikola Tesla (1856-1943), die beweerde een signaal te hebben opgevangen uit 'een andere wereld, onbekend en ver weg'. Het begon met tellen: 'Eén ... twee ... drie ...'.¹ De Amerikaanse wetenschapper Carl Sagan (1934-1996) liet zijn extraterrestrials in zijn sciencefictionroman *Contact* een reeks priemgetallen uitzenden.

In 1960 publiceerde de Nederlandse wiskundige Hans Freudenthal (1905-1990) zijn kunsttaal Lincos (van *Lingua Cosmica*), die niet alleen getallen codeerde door middel van aantallen pulsen, maar ook de relaties tussen de getallen, zoals 'is gelijk aan', 'groter dan' enzovoorts, om de ontvangende intelligente wezens te bewijzen dat wij een net zo ver ontwikkelde beschaving waren.² In de film die in 1997 van *Contact* is gemaakt, ontvangen astronomen van SETI (*search for extraterrestrial intelligence*) een radioboodschap uit de ruimte waarin een Lincos-achtig woordenboek is opgenomen.

Maar moet je echt een ontwikkelde beschaving zijn, of zelfs heel slim, om iets te kunnen begrijpen van de taal van het universum? Kunnen de naar verhouding domme medebewoners van onze eigen wereld, andere diersoorten dan de mens, de taal van het universum ook begrijpen, of dan tenminste het soort karakters die in Lincos worden voorgesteld, de hele of natuurlijke getallen 0, 1, 2, 3 en de verhoudingen ertussen?

In de materiële wereld zijn getallen fundamenteel: de watermolecule H_2O bestaat uit *drie* atomen: *twee* waterstofatomen en *één* zuurstofatoom; stikstofmonoxide NO (een belangrijke cardiovasculaire signaalstof) bestaat uit *twee* atomen, stikstof en zuurstof; distikstofoxide N_2O , lachgas, is een verdovend middel en bestaat uit *drie* atomen: *twee* stikstof- en *één* zuurstofatoom; stikstofdioxide NO_2 is een bijzonder milieuverontreinigende goedje en bestaat uit *één* stikstof- en *twee* zuurstofatomen. Wij hebben *vier* ledematen, insecten hebben er *zes*, spinnen en octopussen *acht*. Wij hebben *twee* ogen, maar sommige spinnen hebben er wel *acht*.

Dit zijn echte eigenschappen van de echte wereld. Dingen zouden heel anders zijn als deze getallen veranderden, als we bijvoorbeeld drie armen hadden en drie ogen. De rekenkundige structuur van de wereld is belangrijk voor ons als wetenschappers, maar kan ook voor andere schepsels belangrijk zijn. Kijk bijvoorbeeld eens naar de volgende getallen in de echte wereld.

Ik kan *drie* rijpe vruchten zien hangen in die boom en *vijf* in deze. Ik kan *vijf* indringers horen in mijn territorium, maar wij zijn maar met *onze drieën*. Daar zwemmen *drie* kleine visjes zoals ik, en hier *vijf*. Ik kan hier *vijf* keer achter elkaar horen kwaken en daar bij de vijver *zes* keer. Tussen mijn huis en de voedselbron kwam ik langs *drie* dikke bomen.

Al die getallen hebben een evolutionaire betekenis en als een schepsel ze kan herkennen, dan kan dat een voordelige aanpassing zijn. Wie voedsel zoekt, heeft er voordeel bij om de boom met vijf rijpe vruchten te kiezen in plaats van die met drie, en de vrouwtjeskikker heeft er voordeel bij als ze paart met een mannetje dat in één ademteug zes keer kan kwaken in plaats van slechts vijf keer (zie hoofdstuk 8). De kans is groter dat leeuwen overleven en zich voortplanten indien ze alleen indringers aanvallen als ze in de meerderheid zijn (zie hoofdstuk 5).

Deze ideeën vormen het uitgangspunt van dit boek. Kunnen onze unieke rekenkundige vermogens een evolutionaire basis heb-

ben? Hoe zouden we erachter kunnen komen of schepsels zonder taal kunnen reageren op de numerieke structuur van het universum?

Er wordt al honderd jaar onderzoek gedaan naar de vermogens van dieren om de wiskundige structuur van hun wereld te begrijpen. Dat betekent echter niet dat hun vermogens, als ze al bestaan, evolutionaire antecedenten zijn van de onze. Daarvoor zou een genetische schakel moeten bestaan tussen hen en ons. Er is een voorbeeld dat hiervoor mogelijk als aanwijzing zou kunnen dienen. We weten dat er genen zijn voor *timing* die meer dan 600 miljoen jaar bewaard zijn gebleven, uit de tijd voordat de ongewervelde dieren (insecten, spinnen enzovoorts) en de gewervelde dieren (vissen, reptielen, zoogdieren) zich afsplitsten. Deze genen hebben heel handig de namen CLOCK (voor klok), PER (voor periode) en TIM (voor het reguleren van de tijd van het circadisch ritme, het dagritme) gekregen. We kunnen deze genen vinden in fruitvliegjes (*Drosophila melanogaster*) en de 'nakomelingen' van deze genen bij een gemeenschappelijke voorouder in mensen. Timing is een wiskundige eigenschap van de wereld, omdat tijdsduur kan worden voorgesteld met een getal. We zouden dus genen voor numerieke vermogens kunnen vinden die samengaan met de genen voor timing.

WAT IS EEN GETAL? WAT IS TELLEN?

Voordat ik dieper in de materie duik, lijkt het me verstandig dat ik eerst duidelijk maak wat ik onder getallen en tellen versta. Alle lezers van dit boek denken dat ze weten wat 'getallen' zijn. Ze kunnen denken aan de woorden *één*, *twee*, *drie* of aan de symbolen *1*, *2*, *3* of aan allebei. Omdat we zijn opgevoed in een numerieke cultuur en hebben geleerd te tellen met telwoorden, denken we misschien

uit gewoonte aan tellen als het onvermijdelijke opzeggen van ‘één, twee, drie...’. Wetenschappers moeten echter specifiek zijn dan dat.

Om te beginnen zijn er veel soorten getallen: positieve hele getallen of natuurlijke getallen; gehele getallen, waartoe ook de negatieve getallen behoren; breuken, decimalen, imaginaire getallen (*i*, de wortel uit -1) en zelfs de surreële getallen van de grote wiskundige John Conway. Tot de hele getallen behoren ordinaalgetallen voor geordende reeksen, zoals de nummers van de bladzijden van een boek of huisnummers in een straat, die niet direct verwijzen naar een grootte. Zo is mijn huis 44, maar het is precies even groot als dat van de burens op 42 en 46. Deze bladzijde is net zo groot als de volgende. Getallen, nummers, zijn er voor tv-kanalen en dan zijn er ook nog telefoonnummers. Deze verwijzen niet naar grootheden, maar ook niet naar een geordende reeks. En het is totaal onzinnig om te vragen of mijn telefoonnummer groter of kleiner is dan het jouwe, of dat het eerder komt of juist later dan het jouwe. Het soort getal dat verwijst naar grootte, is een *kardinaalgetal*. Het verwijst naar de kardinaliteit (de grootte) van een verzameling.³

Het idee van een verzameling dat ten grondslag ligt aan het idee van kardinaalgetallen behoeft enige uitleg. Denk aan een verzameling van drie dingen, bijvoorbeeld de verzameling van drie munten in een fontein. Verzamelingen en hun omvang hangen niet af van wat de voorwerpen zijn: dat kunnen drie munten zijn (dingen), drie plonzen (geluiden) of drie wensen (gedachten). Het belangrijkste is hier dat deze verzamelingen niets anders gemeen hebben dan dat ze uit drie bestaan. Dit voert naar een oud filosofisch probleem, waar ik in het laatste hoofdstuk op in zal gaan.

In dit boek heb ik het verder over kardinaalgetallen, behalve waar ik iets anders aangeef. Hier wil ik echter eerst nog een nieuwe term introduceren, *numerositeit*, om te verwijzen naar de grootte van de verzameling, in plaats van de term *kardinaliteit* uit de logica en de wiskunde te gebruiken. Ik doe dit omdat we het gaan hebben over

wat er omgaat in het brein van een dier, niet over logica of wiskunde.

Ik volg het voorstel van de eminente geleerde Randy Gallistel om te beoordelen of een dier, of een mens, echt in staat is zich numerositeit in het brein voor te stellen.⁴ Hiervoor legt hij twee criteria aan:

- (a) Stellen zij zich numerositeit voor als een afzonderlijke eigenschap van een verzameling, te onderscheiden van de eigenschappen van de voorwerpen binnen de verzameling?

Dit is precies in overeenstemming met wat ik hierboven beschreef.

Het is niet voldoende om je numerositeit voor te stellen, je moet er ook iets mee kunnen doen. Je moet ermee kunnen rekenen, er, wat Gallistel noemt, ‘combinatorische operaties’ van een bepaald type mee uitvoeren.

- (b) Voeren ze met de weergaven van numerositeit combinatorische operaties uit die isomorf zijn aan [gelijkvormig zijn met] de rekenkundige operaties (=, <, >, -, ×, :) die het getallenstelsel definiëren?

We kunnen ons dus afvragen of een dier op een of andere manier kan inzien dat twee verzamelingen dezelfde numerositeit hebben (=), dat verzameling A groter is dan verzameling B ($A > B$) en dat de som van de verzamelingen A en B gelijk is aan verzameling C ($A + B = C$). Van delen en vermenigvuldigen denk je misschien dat dat veel moeilijker is, maar voor een dier is het berekenen hoe vaak voedsel of een predator verschijnt een kwestie van delen (bijvoorbeeld 3 keer per dag = 24 uur gedeeld door 8-uursintervallen). Als het aankomt op navigeren, dan vereist dat behoorlijk ingewikkelde, zogenaamde bestekberekeningen – ‘gegist bestek’ in zeemanstermen.

Dit zijn behoorlijke harde criteria. Ik zou (a) willen verfijnen om te vragen *in welke mate* een dier van een bepaalde verzameling kan

abstraheren naar een nieuwe verzameling. Met andere woorden, kan een dier beoordelen of verzamelingen van verschillende soorten objecten even groot zijn of niet? Kan een dier opmerken dat een verzameling geluiden dezelfde numerositeit heeft als een verzameling prooien? Andere soorten, en sommige mensen, zijn misschien in staat numerositeit op slechts een paar soorten objecten toe te passen, misschien wel op alleen die, die van levensbelang zijn, en niet op andere dingen. Mogelijk zijn ze niet in staat te zeggen of een verzameling van een bepaald soort objecten, bloemblaadjes bijvoorbeeld, dezelfde numerositeit heeft als andere soorten objecten, bijvoorbeeld oriëntatiepunten in het landschap, zoals ik hierna nog zal proberen uit te leggen.

Gallistels twee criteria weerspiegelen het huidige filosofische denken over de basis van het rekenen. Ook weerspiegelen ze hoe het rekenen overal ter wereld gewoonlijk wordt onderwezen: de 1-1-telling van verzamelingen objecten, om ervoor te zorgen dat optellen niet afhankelijk is van de aard van de objecten (abstractie), om vervolgens verder te werken met de rekenkundige gevolgen van de operaties die op verzamelingen worden toegepast: vergelijken, combineren en toevoegen, het splitsen van verzamelingen, aftrekken enzovoorts.

WAT IS TELLEN?

De meeste lezers van dit boek zullen tellen, als ze tenminste ooit over tellen denken, als een bezigheid beschouwen die opzettelijk is, moedwillig, bewust en gewoonlijk gepaard gaande met het gebruik van telwoorden. Een bedoeling en doel van deze bezigheid is het bepalen van de *numerositeit* van een verzameling. Deze kenschets sluit bij voorbaat elk niet-menselijk tellen uit, en zoals we in het volgende hoofdstuk zullen zien, deels ook menselijk tellen. Geen an-

der schepsel heeft telwoorden – afgezien van papegaai Alex, die in hoofdstuk 6 over vogels optreedt – en het toeschrijven van bedoelingen, moedwil of bewustzijn aan niet-mensen is op zijn minst controversieel. We zijn misschien nog wel bereid ze toe te schrijven aan mensapen of honden, maar aan vissen of insecten? In geen geval.

Stel dat je het aantal poppen dat op tafel ligt moet tellen en dat doe je hardop: *één, twee, drie* poppen. Dit stelt je in staat de omvang van de verzameling poppen op tafel te bepalen: drie. In hun baanbrekende werk *The Child's Understanding of Number* (1978) hebben Rochel Gelman en Randy Gallistel de 'telprincipes' op een rijtje gezet die kenmerkend zijn voor het menselijk tellen.⁵ Volgens het 'kardinaliteitsprincipe' geeft het proces van het tellen de kardinaliteit van de verzameling met het laatste woord van het telproces, aangenomen natuurlijk dat alle objecten worden geteld en elk object niet meer en niet minder dan één keer (de 1-1-telling). Dat wil zeggen dat er een strikte één-op-één-correspondentie bestaat tussen de telwoorden en de objecten in de verzameling. Ook merken de auteurs op dat het, om een idee te krijgen van de omvang van de verzameling, niet uitmaakt met welk van de objecten je begint te tellen: de omvang zal altijd hetzelfde zijn. Dus voor de verzameling van de drie objecten A, B en C maakt het niet uit of je met A, B of C begint, want je zult altijd eindigen met de numerositeit drie. Dit noemen zij het 'principe van volgorde-irrelevantie'. Ten slotte merken ze op dat verzamelingen van alles kunnen omvatten: drie poppen, drie plonzen of drie wensen. Dit noemen ze het 'abstractieprincipe'. Deze principes moeten mensen beheersen om competente tellers te zijn die telwoorden gebruiken. Ze brengen de culturele instrumenten – telwoorden – samen met het concept van de grootte van een verzameling. In het volgende hoofdstuk zal ik ingaan op hoe kinderen leren tellen met telwoorden.

Denk nu eens na over een manier om de elementen van een verzameling te tellen zonder telwoorden te hoeven gebruiken, namelijk door een heel eenvoudig en goedkoop apparaatje ter hand

te nemen, de handteller of ‘klikker’ (zie afb. 1). Je drukt de knop bovenop voor ieder te tellen object één keer in – het principe van de een-op-een-correspondentie. Het totaal van de telling verschijnt op de teller bij de laatste keer indrukken van het knopje, het kardinaliteitsprincipe. Je kunt alles tellen wat telbaar is (het abstractieprincipe) en je kunt de verzameling tellen door te beginnen met willekeurig welk element (het principe van volgorde-irrelevantie).

Afb. 1 Mechanische handteller



Om een handteller te gebruiken, moet een *persoon* zelf ook tellen. Dat is het moeilijke deel. Stel dat je een herder bent die zijn schapen wil tellen, maar niet zijn geiten. Dan moet je wel kunnen beslissen welk dier het ene is en welk het andere. Stel dat je dan moet vaststellen of je meer schapen hebt dan geiten; je zult de geiten met een andere teller moeten tellen en dan op het schermpje kijken om te zien welk getal het grootst is. De tellers hebben een geheugen – de cijfers achter het schermpje – waarmee het aantal getelde objecten wordt aangeduid. Natuurlijk kun je dezelfde teller twee keer gebruiken, een keer voor de schapen en dan nog een keer voor de geiten, maar dan moet je een apart geheugen hebben voor de schapen, de teller op nul zetten en opnieuw beginnen te tellen, ditmaal de geiten. In beide gevallen heb je ook een instrument nodig om de vergelijking uit te voeren. Hoe dit werkt, zal ik zo laten zien.

De Engelse filosoof John Locke (1632-1704) deed een vroege

poging om getal en tellen te kenschetsen op een wijze die vooruitloopt op onze teller in *An essay concerning human understanding* (1690). Volgens hem is het eenvoudigste idee *één*; *één* kan worden herhaald, 'en door herhalingen bij elkaar op te tellen' – zoals het herhalen van het drukken op de knop – krijgen we het ingewikkelde idee van grotere getallen. 'Dus door *één* bij *één* op te tellen, krijgen we het complexe *idee* van een paar,' enzovoorts.⁶

Dit is een voorbeeld van *recursie*, een procedure of functie die oproept om hetzelfde nog een keer te doen. Locke stelt een bepaalde vorm van recursie voor, de staartrecursie, waar een procedure het laatste item genereert (de staart) door *één* erbij op te tellen en zichzelf dan aanroept om de procedure opnieuw uit te voeren, waardoor er nog *één* bij wordt opgeteld.

Over telwoorden zegt Locke dat we elk complex idee 'een naam of teken' moeten geven, 'waarmee we het kunnen onderscheiden van die, die ervoor en erna komen'. Je kunt de teller beschouwen als een uitvoering van Lockes gedachte. Elke keer de knop indrukken is een herhaling van *één* en de som van de keren indrukken wordt gegeven door een 'teken', in dit geval een resultaat in cijfervorm.

Het andere probleem is de mate van abstractie die betrokken is bij tellen en getallen. Om vijf uur slaat de Big Ben vijf keer en we hebben aan iedere hand vijf vingers, maar geluiden en vingers hebben niets gemeenschappelijks. Dus hoe kunnen hersenen, zelfs heel kleine, dit idee van abstractie inzetten en hoe komen wij erachter dat ze dat doen? We kunnen mensen vragen hardop te tellen of ons te vertellen of het aantal slagen van de klok hetzelfde is als het aantal vingers, maar dat kunnen we bij vissen niet doen. In welke mate kunnen andere schepsels de numerositeit in de ene modaliteit – geluiden bijvoorbeeld – generaliseren tot numerositeiten in andere modaliteiten – zichtbare voorwerpen, handelingen enzovoorts? Dit is eerder een zaak van een *selector* dan van de teller. Hoewel ik deze component deze speciale naam gegeven heb, is hij in werkelijkheid gebaseerd op wijdverspreide ideeën in de cognitieve en de neurowe-

tenschap. Het is een manier om zich te richten op of aandacht te besteden aan een object of gebeurtenis. Het selectieproces hoeft niet bewust te zijn of zelfs maar opzettelijk, wat overigens controversiële concepten zijn als ze worden toegepast op andere dieren dan mensen. De selector kiest slechts een of meer objecten uit de omgeving voor verdere actie.⁷ We kunnen een enkele handteller gebruiken om de slagen van de klok en de vingers aan een hand te tellen, zolang die klikker maar twee geheugenplaatsen ter beschikking heeft.

EEN NEURAAAL TELMECHANISME

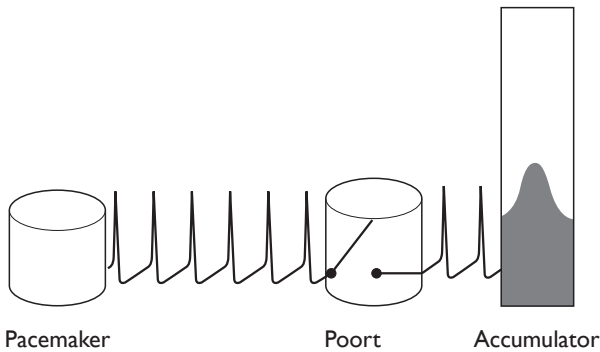
Natuurlijk hebben we geen handtellers in ons hoofd, maar hebben we dan misschien een neuraal equivalent? De handteller is een *lineaire accumulator* met geheugen. Dat wil zeggen dat de inhoud van de accumulator, deze opteller, strikt evenredig is met het aantal getelde objecten.

Dat ons brein een dergelijk mechanisme zou bevatten, is een oud idee dat feitelijk afkomstig is van het werken met dieren. Hetzelfde telmechanisme kan ook tijdsduur meten, en dat is nodig als dieren de snelheid of frequentie van gebeurtenissen moeten berekenen.⁸

Voor dit accumulatiesysteem zijn drie componenten en een proces noodzakelijk:

- *Een interne generator*, zoals een oscillator of *pacemaker*, waarvan het brein er vele bezit, die met regelmatige intervallen pulsen naar een accumulator stuurt.
- *Een normalisatieproces* dat alle objecten of gebeurtenissen als gelijkwaardig behandelt.
- *Een poort* om de overdracht te controleren van de pulsen tussen generator en de accumulator.
- *Een accumulator* die de pulsen tijdelijk opslaat.

Buiten deze componenten moet het accumulatiesysteem ook een *werkgeheugen* hebben om de resultaten van de lopende telling in op te slaan, en een *referentiegeheugen* voor toekomstig gebruik. Als we even teruggaan naar onze herder: het aantal schapen wordt overgebracht naar het referentiegeheugen en de lopende telling van de geiten naar het werkgeheugen. Afb. 2 is een manier om de accumulator voor te stellen.



Afb. 2. Dit is de eerste versie van het model van de dierpsychologen Warren Meck en Russell Church.⁹ Zij gebruikten de termen ‘pacemaker’ en ‘poort’ voor genormaliseerde objecten of gebeurtenissen door toe te staan dat een vastgesteld aantal pulsen voor ieder object of gebeurtenis doorgaat naar de accumulator. Hier laat ik elk object zien als twee pulsen. Om combinatorische operaties uit te voeren die het equivalent zijn van rekenen moet er een ‘werkgeheugen’ zijn om de toestand van de accumulator tijdelijk in op te slaan, en een ‘referentiegeheugen’ om de operaties, inclusief vergelijken, te kunnen uitvoeren (<, >, =, +, -, ×, :).

Er is, zoals ik opmerkte, nog een component die neuraal veel kostbaarder is: de selector. Deze kiest de objecten die geteld moeten worden, zoals de schapen en niet de geiten. Ook moet er een mechanisme zijn om die ‘combinatorische operaties’ uit te voeren. Dat is bijvoorbeeld een combinatorische operator om te besluiten of de verzameling schapen groter is dan de verzameling geiten (isomorf aan, dat wil zeggen van dezelfde structuur als <, > of =), of wat het totaal aantal schapen plus geiten is (optelling), of hoeveel scha-